数学分析笔记 (3)

第 13 章 重积分

定理

划分, 零边界区域

定理 13.1.1　有界点集 D 是可求面积的充要条件是它的边界 ∂D 的面积为 0. 即零边界区域是可求面积的.

- Dirichlet 函数形成的平面点集 $S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le D(x)\}$ 的边界为 $\partial S=[0,1]\times[0,1]$, 面积为 1, 故 S 是不可求面积的.

性质 1 若在已有的划分上添加有限条曲线进一步划分, 则 Darboux 大和不增, Darboux 小和不减.

性质 2 任何一个 Darboux 小和都不大于任何一个 Darboux 大和. 因此, 若记

$$
\begin{aligned}
&M_i=\sup f(x,y),\quad m_i=\inf f(x,y),\quad (x,y)\in\Delta D_i.\\
&S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta\sigma_i,\quad s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta\sigma_i\\
&I^*=\inf\{S\},\quad I_*=\sup\{s\}
\end{aligned}
$$

则有

$$
s\le I_*\le I^*\le S
$$

性质 3 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是

$$
\lim_{\lambda\to0}(S-s)=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i=0.
$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的 **振幅**. 此时成立

$$
\lim_{\lambda\to0}s=\lim_{\lambda\to0}S=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.
$$

定理 13.1.2　若 $f(x,y)$ 在零边界区域 D 上连续, 那么它在 D 上可积.

- 条件可放宽至有界, 但至多在有限条面积为零的曲线上不连续.

质心坐标.

Peano 曲线.

性质 1 (线性性) $\displaystyle\int_\Omega(\alpha f+\beta g)\,\mathrm{d}V=\alpha\int_\Omega f\,\mathrm{d}V+\beta\int_\Omega g\,\mathrm{d}V.$

性质 2 (区域可加性) $\displaystyle\int_\Omega f\,\mathrm{d}V=\int_{\Omega_1}f\,\mathrm{d}V+\int_{\Omega_2}f\,\mathrm{d}V.$

性质 3 $\displaystyle\int_\Omega\mathrm{d}V=\Omega$ 的体积.

性质 4 (保序性) $f \le g \Rightarrow \int_\Omega f\,\mathrm{d}V \le \int_\Omega g\,\mathrm{d}V$.

性质 5 $mV \le \int_\Omega f\,\mathrm{d}V \le MV$.

性质 6 (绝对可积性) $\left|\int_\Omega f\,\mathrm{d}V\right| \le \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}V$.

性质 7 (乘积可积性)

性质 8 (积分中值定理) $\int_\Omega f\cdot g\,\mathrm{d}V = f(\xi)\int_\Omega g\,\mathrm{d}V$.

定理 13.2.1 设二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积. 若积分

$$h(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

对于每个 $x\in[a,b]$ 存在, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并有等式

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

定理 13.2.2 多重积分的上述公式.

n 维单纯形 ⭐ $T_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0,\ x_1+x_2+\cdots+x_n\le h\}$.

- $V_n(a)=\dfrac{a^n}{n!}$.

重积分的变量代换

定理 13.3.1 (二重积分变量代换公式)

定义 13.3.1 形如

$$\begin{aligned}&T_x: x=x(u,v)=u,\ y=(u,v),\\&T_y: x=x(u,v),\ y=y(u,v)=v.\end{aligned}$$

的映射称为 **本原映射**.

引理 13.3.1 设 T 为本原映射, 则对于每个属于 B_n 的小矩形 R, 等式

$$mT(R)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde u,\tilde v)}mR.$$

成立, 其中 $(\tilde u,\tilde v)$ 为 R 上某一点, $mT(R)$ 为其面积.

引理 13.3.2

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\textcolor{red}{\text{\textbackslash ddd}}uv.$$

引理 13.3.3 若 T 满足定理 13.3.1 的假设, 则对于 $\forall Q_0=(u_0,v_0)\in U$, T 在 Q_0 附近可以表成两个具有连续导数的、一对一的本原映射的复合.

定理 13.3.2 (n 重积分的变量代换)

反常重积分

记 $d(\Gamma) = \inf\left\{\sqrt{x^2+y^2} \mid (x,y)\in\Gamma\right\}$ 为 Γ 到原点的距离.

引理 13.4.1 设 $f(x,y)$ 为无界区域 D 上的非负函数.如果 $\{\Gamma_n\}$ 是一列曲线, 它们割出的 D 的有界子区域 $\{D_n\}$ 满足

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} d(\Gamma(\gamma_n)) = +\infty.$$

则反常积分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在 D 上收敛的充要条件: 数列 $\displaystyle\left\{\iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$ 收敛, 且在收敛时成立

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 13.4.1 (比较判别法)

定理 13.4.2 ⭐ 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 上具有分段光滑边界的无界区域, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是: $|f(x,y)|$ 在 D 上可积.

推论 13.4.1 (Cauchy 判别法) 设 D 为用极坐标表示的区域

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 < a \le r < +\infty,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ \alpha,\beta \in [0,2\pi]\}.$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2}$. $f(x,y)$ 为定义在 D 上的函数. 则

1. 如果存在正常数 M, 使得在 D 上成立 $|f(x,y)| \le \dfrac{M}{r^p}$, 则当 $p>2$ 时, $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.
2. 如果存在正常数 m, 使得在 D 上成立 $|f(x,y)| \ge \dfrac{m}{r^p}$, 则当 $p\le 2$ 时, $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散.

定理 13.4.2 设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y$ 都存在, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可积, 且等于累次积分.

定理 13.4.4 变量代换公式亦然成立, 且可由此推出积分收敛.

微分形式

⭐ 有向面积, **外积**:

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

外积的性质

1. 反称性: $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$.

   推论: $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a} = 0$.

2. 双线性 (分配律)

   1. $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}$.
   2. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$.
   3. $(\lambda\boldsymbol{a})\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\wedge(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$.

变量代换的微元关系

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

一次微分形式 (1-形式) 全体记为 $\Lambda^1(U)$.

$$a_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1+a_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2+a_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n,\quad a_i(\boldsymbol{x})\in C^1(U).$$

二次微分形式 (2-形式) 全体记为 $\Lambda^2(U)$. 下式为其标准形式.

$$\sum_{1\le i<j\le n}g_{ij}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j.$$

$k-$形式的标准形式为

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}g_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(\boldsymbol{x})$$

微分形式的外积 ⭐

$$\begin{aligned}
\omega&=a_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1+a_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2+\cdots+a_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n,\\
\eta&=b_1(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_1+b_2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_2+\cdots+b_n(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_n,\\
\omega\wedge\eta&=\sum_{i,j=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})b_j(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\\
&=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i(\boldsymbol{x})b_j(\boldsymbol{x})-a_j(\boldsymbol{x})b_i(\boldsymbol{x})\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\\
&=\sum_{1\le i<j\le n}\begin{vmatrix}a_i(\boldsymbol{x})&a_j(\boldsymbol{x})\\b_i(\boldsymbol{x})&b_j(\boldsymbol{x})\end{vmatrix}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j.
\end{aligned}$$

记 $\Lambda=\Lambda^0+\Lambda^1+\cdots+\Lambda^n$, 其中元素的一般形式为 $\omega=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n,\omega_i\in\Lambda^i$.

对于 $\mathrm{d}x_I=\mathrm{d}x_{i1}\wedge\mathrm{d}x_{i2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{ip}$ 和 $\mathrm{d}x_J=\mathrm{d}x_{j1}\wedge\mathrm{d}x_{j2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{jq}$, 定义外积

$$\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J=\mathrm{d}x_{i1}\wedge\mathrm{d}x_{i2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{ip}\wedge\mathrm{d}x_{j1}\wedge\mathrm{d}x_{j2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{jq}.$$

对于 $\omega=\sum\limits_{I}g_I(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I$ 和 $\eta=\sum\limits_{J}h_J(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_J$, 定义外积

$$\omega\wedge\eta=\sum_{I,J}g_I(\boldsymbol{x})h_J(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J.$$

对于 $0-$形式 f, 补充定义

$$f\omega=f\wedge\omega=\sum_{I}f(\boldsymbol{x})g_I(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_I,\quad\omega\in\Lambda^p.$$

外积的性质

性质 1 设 $\omega\in\Lambda^p,\ \eta=\Lambda^q$, 则当 $p+q>n$ 时, $\omega\wedge\eta=0$.

性质 2 设 $\omega\in\Lambda^p,\ \eta=\Lambda^q$, 则 $\omega\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\omega$.

推论 13.5.1 设 $\omega\in\Lambda^p$, 则当 p 为奇数时, $\omega\wedge\omega=0$.

性质 3 $\forall\omega,\eta,\sigma\in\Lambda$, 成立分配律和结合律:

1. $(\omega+\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma$.

   $\sigma\wedge(\omega+\eta)=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta$.
2. $(\omega\wedge\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma)$.

变量代换公式

$$T: y_1 = y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ y_2 = y_2(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \cdots,\ y_n = y_n(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

$$\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

实际上, 对于 1-形式 $\omega_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{d}x_i$, 有

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \det(a_{ij})\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

笔记

特殊积分

- **Poisson 积分**: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$
- $\displaystyle\int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq 1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}} = \begin{cases} \dfrac{\pi^{m+1}}{m!}, & n = 2m+1, \\ \dfrac{2^m}{(2m-1)!!}, & n = 2m. \end{cases}.$

  注: 累次积分一次后, 即高维球的体积.

函数转积分

- $\displaystyle\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}.$

例题

第 14 章 曲线积分、曲面积分与场论

定理

性质 1 (线性性)

性质 2 (路径可加性)

定理 14.1.1 设 L 为光滑曲线, 函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续, 则 $f(x,y,z)$ 在 L 上的第一类曲线积分存在, 且

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

简单曲面: 具有分段光滑边界的有界闭区域.

$$\boldsymbol{r} = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}.$$

$$S = \iint_D \|\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

定理 14.1.2 ⭐ 记曲面的 **Gauss 系数** 为

$$
\begin{aligned}
E &= \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\
F &= \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\
G &= \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = x_v^2 + h_v^2 + z_v^2.
\end{aligned}
$$

则曲面的面积为 $S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$

- 注意到 $EG - F^2 = \left[\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|^2.$

Schwarz 的例子 可以将光滑曲线的弧长定义为内接折线长度的极限, 但不能推广到光滑曲面的面积定义. (如圆柱)

第二类曲线积分 令单位切向量为 $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, 则 $\int_L \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, \mathrm{d}s = \int_L \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$

$$
\int_L P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y + R\, \mathrm{d}z = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, \mathrm{d}s
$$

性质 1 (方向性)

性质 2 (线性性)

性质 3 (路径可加性)

双侧曲面, 定向曲面, Mobius 带, 单侧曲面

第二类曲面积分 令单位法向量为 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\iint_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S.$

性质 1 (方向性)

性质 2 (线性性)

性质 3 (曲面可加性)

$$
\mathrm{d}x\mathrm{d}y := \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = a\cos\alpha\, \mathrm{d}S
$$

参数方程的曲面积分

$$
\begin{aligned}
\iint_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \iint_\Sigma P\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \iint_\Sigma P\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\, \mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, \mathrm{d}S \\
&= \pm \iint_D \left[P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

$$
\iint_\Sigma R(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

简单闭曲线 (Jordan 曲线) $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2).$

单连通区域, 复连通区域. 标准区域,

定理 14.3.1 (Green 公式) 设 D 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围成的单连通闭区域. 如果函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数, 那么

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 ∂D 取正向, 即 **诱导定向**.

⭐ 取单位切向量为 $\boldsymbol{\tau}$, 单位外法向量为 $\boldsymbol{n}$, 那么

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial D} F\,\mathrm{d}y - G\,\mathrm{d}x = \int_{\partial D} [F\sin(\boldsymbol{\tau},x) - G\cos(\boldsymbol{\tau},x)]\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\partial D} [F\cos(\boldsymbol{n},x) + G\cos(\boldsymbol{n},y)]\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

⭐ 求平面图形面积

$$S = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

定理 14.3.2 (Green 定理) 设 D 为平面上的单连通区域, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上具有连续的偏导, 则下面的四个面体等价:

1. 对于 D 内任意一条分段光滑的闭曲线 L 有 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$.
2. 曲线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关.
3. $\exists U(x,y) \in D : \mathrm{d}U = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$.
4. 在 D 内成立等式 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

定理 14.3.3 曲线积分 $\displaystyle\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件是, 存在原函数 $U(x,y)$ 使得

$$\int_{\widehat{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A).$$

定理 13.4 (Gauss 公式) 下式 $\partial\Omega$ 的定向为外侧, 称为其 **诱导定向**.

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

⭐ 计算体积

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\partial\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 14.3.5 (Stokes 公式)

$$\int\limits_{\partial\Sigma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint\limits_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S.$$

- 上式可用三阶行列式的记号表示, 不再列出.

外微分

外微分例子

$$\begin{aligned} \omega &= P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned}$$

外微分性质

性质 1 设 ω 为 $k-$形式, η 为 $l-$形式, 则

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta) = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + \mathrm{d}\eta\wedge\omega = \mathrm{d}\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta.$$

- 设 $f\in\Lambda^0$ 为 $0-$形式, 则 $\mathrm{d}^2 f = 0$.

性质 2 $\forall\omega\in\Lambda: \mathrm{d}^2\omega = 0$.

Stokes 公式 ⭐ $\displaystyle\int\limits_{\partial M}\omega = \int\limits_{M}\mathrm{d}\omega.$

场论初步

数量场, 向量场; 稳定场, 不稳定场.

梯度 $\nabla f = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}$.

方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \nabla f\cdot\boldsymbol{l}$.

单位法向量上 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \|\nabla f\|$.

梯度的另一种表示 $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{n}$.

由数量场 f 产生的向量场 ∇f 称为 **梯度场**.

通量 $\displaystyle\Phi = \iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$

散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}.$

定理 14.5.1 散度是通量关于体积的变化率, 即穿出单位体积边界的通量, 即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}(M)=\lim_{V\to M}\iint\limits_{\sum}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{mV}.$$

由向量场 $\boldsymbol{a}$ 产生的数量场 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 称为 **散度场**.

Gauss 公式 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$

电场的高斯定理 $\displaystyle\iint\limits_{\sum}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}.$

向量线 (流线)

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)}.$$

环量与旋度

流体在旋涡中心附近的速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$.

定义向量 $\boldsymbol{B}=\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y}-\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z}-\dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial x}-\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{\omega}.$

则 $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint\limits_{\sum}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$

环量 $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$

旋度 $\nabla\times\boldsymbol{a}(M)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{pmatrix}_M.$

由向量场 $\boldsymbol{a}$ 产生的向量场 $\nabla\times a$ 称为 **旋度场**.

若 $\nabla\times\boldsymbol{a}\equiv\mathbf{0}$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为 **无旋场**.

Stokes 公式 $\displaystyle\iint\limits_{\sum}\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int\limits_{\partial\sum}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$

环量面密度 $\displaystyle\lim_{\sum\to M}\int\limits_{\partial\sum}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{m\sum}=\nabla\times\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}.$

定理 14.5.2 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点处沿旋度方向的环量面密度最大, 且最大值为 $\|\nabla\times\boldsymbol{a}(M)\|$.

- 流体速度场中, 在与 $\nabla\times\boldsymbol{a}$ 垂直的平面上, 沿单位面积边缘的环量最大, 达到角速度的模的两倍.

磁场的安培环路定律 $\displaystyle\int\limits_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mu_0 I.$

Hamilton 算子

梯度、散度、旋度的 Hamilton 算子表示.

注意 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}=P\dfrac{\partial}{\partial x}+Q\dfrac{\partial}{\partial y}+R\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Laplace 算子 $\Delta=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, 具体有两种含义:

1. $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
2. $\Delta\boldsymbol{a}=\Delta P\boldsymbol{i}+\Delta Q\boldsymbol{j}+\Delta R\boldsymbol{k}$. (注意并非直接对分量求二阶导 ⭐)

满足 **Laplace 方程** $\Delta u(x,y,z)=0$ 的函数叫做 **调和函数**.

Gauss 公式 $\displaystyle\iint\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V$.

Stokes 公式 $\displaystyle\int\limits_{\partial\sum}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint\limits_{\sum}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

Green 第一公式 ⭐ 由 $\boldsymbol{\nabla}\cdot(g\boldsymbol{\nabla}f)=\boldsymbol{\nabla}g\cdot\boldsymbol{\nabla}f+g\Delta f$ 得:

$$\iiint\limits_{\Omega}(\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{\nabla}g+f\Delta g)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}f\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$
$$\iiint\limits_{\Omega}(\boldsymbol{\nabla}g\cdot\boldsymbol{\nabla}f+g\Delta f)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}g\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$

Green 第二公式 ⭐ 由上两式相减即得:

$$\iiint\limits_{\Omega}(f\Delta g-g\Delta f)\,\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}-g\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S$$

Hamilton 算子的性质 ⭐ ⭐

以下 f 为数量场函数, $\boldsymbol{a}$ 为向量场函数, $\boldsymbol{c}$ 为常向量.

梯度

1. $\boldsymbol{\nabla}(\lambda f+\mu g)=\lambda\boldsymbol{\nabla}f+\mu\boldsymbol{\nabla}g$.
2. $\boldsymbol{\nabla}(fg)=f\boldsymbol{\nabla}g+g\boldsymbol{\nabla}f$.
3. $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\cdot\boldsymbol{a}$.
4. $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})$.

散度

5. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})+\mu(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})$.
6. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a})=f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{a}$.
7. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})$.
8. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)=\Delta f$.
9. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})=0$.

旋度

10. $\boldsymbol{\nabla} \times (\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b})$.
11. $\boldsymbol{\nabla} \times (f\boldsymbol{a}) = f\boldsymbol{\nabla} \times a + \boldsymbol{\nabla} f \times \boldsymbol{a}$.
12. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}$.
13. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = \boldsymbol{0}$.
14. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}) - \Delta \boldsymbol{a}$.

其它

15. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (g\boldsymbol{\nabla} f) = \boldsymbol{\nabla} g \cdot \boldsymbol{\nabla} f + g\Delta f$.
16. $\Delta \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a})$.

常值

17. $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 0$.
18. $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{c}$.
19. $\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{r}^2 \boldsymbol{c}\right) = 2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c}$.

由性质 3, $f\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (f\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{a}$, 积分即得 "分部" 积分公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f\boldsymbol{\nabla} \cdot a \,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\Omega} f\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{a} \,\mathrm{d}V.$$

定义 14.5.3　若 $\exists U(x, y, z) : \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} U$, 则称向量场 $\boldsymbol{a}$ 为 **有势场**, 并称函数 $V = -U$ 为 **势函数**.

- 有势场是梯度场, 一个场的势函数有无穷多个.

定义 14.5.4　保守场

单连通区域

- 空心球是单连通区域, 但不是二维单连通的.
- 环面内部是二维单连通的, 但不是单连通的.

定理 14.5.3　设 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ 为单连通区域, 在 Ω 上定义了向量场

$$\boldsymbol{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

并且各分量具有连续偏导, 则以下四个命题等价:

1. 沿 Ω 内任意闭曲线的积分值为零.
2. $\boldsymbol{a}$ 是保守场.
3. $\boldsymbol{a}$ 是有势场.
4. $\boldsymbol{a}$ 是无旋场.

定理 14.5.4　原函数与三维的牛顿 - 莱布尼茨定理.

电力线, 等势线.

热传导模型

⭐

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Q &= -k\,\mathrm{d}t \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = -k\,\mathrm{d}t \iint\limits_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\nabla} U)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -k\,\mathrm{d}t \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nabla} U\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= -k\,\mathrm{d}t \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} U\,\mathrm{d}V = -k\,\mathrm{d}t \iiint\limits_{\Omega} \boldsymbol{\nabla}^2 U\,\mathrm{d}V = -k\,\mathrm{d}t \iiint\limits_{\Omega} \Delta U\,\mathrm{d}V \\
\mathrm{d}Q &= \iiint\limits_{\Omega} c\,\mathrm{d}U\,\rho\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}t \iiint\limits_{\Omega} c\rho\frac{\partial U}{\partial t}\,\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\Delta U \equiv a^2 \Delta U.
$$

当温度场是稳定场时, 上述方程即 Laplace 方程 $\Delta U = 0$, 即 U 是调和函数.

无热源的稳定温度场 U 满足以下条件:

$$
\begin{cases}
\Delta U = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\
\displaystyle\iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.
\end{cases}
$$

笔记

曲线长度

- $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$.

  $$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x,y,z)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t.$$

曲面面积

- $\boldsymbol{r} = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}$.

  $$S = \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

  $$\iint_\sum f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

- $z = f(x,y)$. 即 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k}$, 使用上述公式

  $$S = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- $H(x,y,z) = 0$. 假设 $z = f(x,y)$, 使用上述公式.

  $$S = \iint_D \frac{\|\boldsymbol{\nabla} H\|}{H_z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Hamilton 算子的性质

见定理部分.

调和函数

- 等价条件
    - 二维: 对于任意光滑封闭曲线 C, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向单位向量,

$$\Delta u\equiv 0\quad\Leftrightarrow\quad\int\limits_C\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s\equiv 0.$$

    - 三维: 对于任意光滑封闭曲面 $\sum$, 其中 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向单位向量,

$$\Delta u\equiv 0\quad\Leftrightarrow\quad\iint\limits_{\sum}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\sum}\boldsymbol{\nabla}u\,\mathrm{d}S\equiv 0.$$

- 性质
    - 对于二元的调和函数 u,v, $\forall p\geq 2, F=\sqrt{u^2+v^2}\neq 0$, 成立 $\Delta(F^p)\geq 0$.

      满足 $\Delta f\geq 0$ 的二元函数称为次调和函数.
    - 对于包含定点 (x_0,y_0,z_0) 的任意分片光滑封闭曲面, 记 $\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, 则

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sum}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

- 例子
    - 二维
        - $u=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.
        - $u=\mathrm{e}^x\sin y$.
        - $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.
    - 三维. 定义 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
        - $u=\dfrac{1}{r}$.
        - $u=\dfrac{x}{r^3}$.
        - $u=\ln(r+z)$.
        - $u=\dfrac{x}{r(r+z)}$.

一些公式

- 由 Green 公式得:

$$\int\limits_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

-

例题

1. 卫星电波覆盖地球的面积 $S=4\pi R^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=4\pi R^2\cdot\dfrac{h}{2(R+h)}$.
2. 设 $\omega=\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$ $(a_{ij}=-a_{ji},\ i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $2-$形式, 则

$$\omega=\frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k.$$

3.

未做前三节习题.

第 15 章 含参变量积分

定理

含参变量的常义积分

第二类完全椭圆积分 ⭐

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

其中 $k=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$, 椭圆周长 $C=\displaystyle\int_L \mathrm{d}s=b\,E(k)$. 第二类椭圆积分满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

定理 15.1.1 (连续性定理) 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则函数

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续.

- 极限运算与积分运算可交换: $\displaystyle\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

定理 15.1.2 (积分次序交换定理) 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

定理 15.1.3 (积分号下求导定理) 设 $f(x,y)$, $f_y(x,y)$ 都在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则

$$\frac{\mathrm{d}I(y)}{\mathrm{d}y}=\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

定理 15.1.4 (变上下限求导公式) 对于 $F(y)=\displaystyle\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$, 有

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,\mathrm{d}x+f(b(y),y)b'(y)-f(a(y,y))a'(y).$$

- 对于类似 $I(\theta)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\,\mathrm{d}x$ $(|\theta|<1)$ 的积分, 可以采用费曼积分法, 即先求出 $I'(\theta)$ 再做积分.

含参变量的反常积分

定理 15.2.1 (Cauchy 收敛原理) 含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛的充要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在与 y 无关的正数 A_0, 使得对于任意的 $A',A>A_0$, 成立

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad y\in[c,d].$$

推论 15.2.1 若存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对于任意大的正数 A_0, 总存在 $A',A>A_0$ 及 $y_{A_0}\in[c,d]$, 使得

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y_{A_0})\,\mathrm{d}x\right|\geq\varepsilon_0,$$

那么含参变量反常积分 $\int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上非一致收敛.

定理 (Weierstrass 判别法) 如果存在函数 $F(x)$ 使得

1. $|f(x,y)|\leq F(x),\quad a\leq x<+\infty,\ c\leq y\leq d.$
2. 反常积分 $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

那么含参变量的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

定理 15.2.3 设函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 满足以下两组条件之一, 则含参变量的反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$$

关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

1. **Abel 判别法** (一致收敛 + 单调有界)
    1. $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.
    2. $g(x,y)$ 关于 x 单调.
    3. $g(x,y)$ 一致有界, 即存在正数 L, 使得

    $$|g(x,y)|\leq L,\quad a\leq x<+\infty,\ c\leq y\leq d.$$

2. **Dirichlet 判别法** (一致有界 + 单调趋零)
    1. $\int_a^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 一致有界, 即存在正数 L, 使得

    $$\left|\int_a^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right|\leq L,\quad a<A<+\infty,\ y\in[c,d].$$

    2. $g(x,y)$ 关于 x 单调.
    3. 当 $x\to+\infty$ 时, $g(x,y)$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致趋于零, 即

    $$\forall\varepsilon>0,\exists A_0,\forall x\geq A_0,\forall y\in[c,d]:|g(x,y)|<\varepsilon.$$

定理 15.2.4 (Dini 定理) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续且保持定号, 如果含参变量积分

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续, 那么含参变量积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

一致收敛积分的分析性质

采用如下记号:

$$
\begin{gathered}
I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y\in[c,d] \\
a_0=a, \quad a_{n+1}>a_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \\
u_n(y)=\int_{a_{n+1}}^{a_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad n=1,2\cdots \\
\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)
\end{gathered}
$$

引理 15.2.1 若含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

定理 15.2.5 (连续性定理) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则函数

$$
I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x
$$

在 $[c,d]$ 上连续, 极限运算与积分运算可以交换, 即

$$
\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y_0\in[c,d].
$$

定理 15.2.6 (积分次序交换定理) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则积分次序可交换, 即

$$
\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.
$$

定理 15.2.6' 设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,C]$ 上一致收敛, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 x 在 $[a,A]$ 上一致收敛, 且 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y$ 和 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x$ 中有一个存在, 那么

$$
\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y.
$$

定理 15.2.7 (积分号下求导定理) 设 $f(x,y), f_y(x,y)$ 都在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对于每个 $y\in[c,d]$ 收敛, 且 $\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛, 则 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上可导, 并且在 $[c,d]$ 上成立

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,\mathrm{d}x.
$$

Beta 函数 (第一类 Euler 积分)

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x,\quad p,q\in(0,+\infty).$$

性质

1. 连续性.
2. 对称性 $B(p,q)=B(q,p)$.
3. 递推公式

$$\begin{aligned}B(p,q)&=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)\\&=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1)\end{aligned}$$

4. 其它表示

$$\begin{aligned}B(p,q)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi &&(x=\cos^2\varphi)\\&=\int_0^1\frac{t^{q-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t &&(x=\frac{1}{1+t};\ t=\frac{1}{u})\end{aligned}$$

5. 特殊值

$$\begin{aligned}&B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi\\&B(s,s)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x=\frac{B\left(\frac{1}{2},s\right)}{2^{2n-1}}\end{aligned}$$

Gamma 函数 (第二类 Euler 积分)

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\quad s\in(0,+\infty).$$

性质

1. 连续性与可导性.
2. 递推公式: $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.
3. 其它表示

$$\begin{aligned}\Gamma(s)&=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{+\infty}t^{2s-1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\&=\alpha^s\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

4. 定义域的延拓.

Beta 函数与 Gamma 函数的关系

定理 15.3.1

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

证明

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^{+\infty}s^{2p-1}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s\int_0^{+\infty}t^{2q-1}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\&=4\iint\limits_{D'}r^{2(p+q)-1}\mathrm{e}^{-r^2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=B(p,q)\Gamma(p+q).\end{aligned}$$

定理 15.3.2 (Legendre 公式)

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\Gamma(2s),\quad s>0.$$

定理 15.3.3 (余元公式)

$$B(s,1-s)=\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},\quad 0<s<1.$$

引理 15.3.1 设连续可积函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在区间 $[a,b)$ 上收敛于 $u(x)$, 函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上可积, 进一步设

1. $0\le u_n(x)\le\varphi(x),\quad a\le x<b,\ n=1,2,\cdots.$
2. 对于任意 $\varepsilon>0$, $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上一致收敛.

那么极限运算与积分运算可交换, 即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 进一步, 将 $[a,b)$ 换成 $(a,b]$ 或 (a,b) 也成立.

引理 15.3.2

$$\frac{\pi}{\sin\pi x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right),\quad x\in(0,1).$$

定理 15.3.4 (Stirling 公式) Gamma 函数有如下的渐进估计, 其中 $0<\theta<1$.

$$\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{\mathrm{e}}\right)^s\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12s}},\quad s>0.$$

笔记

含参反常积分的例子

- **Dirichlet 积分 ⭐** $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$
  - 由费曼积分法得: $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha.$
  - 由此可得: $\operatorname{sgn}(x)=\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t.$

- $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. ⭐
- $I=\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^\alpha+x^\beta}=\alpha^{-1}\beta^{-1}\Gamma(\alpha^{-1})\Gamma(\beta^{-1})\Gamma(1-\alpha^{-1}-\beta^{-1})$. ⭐
- $I=\displaystyle\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}=\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\Gamma(\alpha^{-1})\Gamma(\beta^{-1})\Gamma(\gamma^{-1})$. ⭐
- $I=\displaystyle\iint\limits_{D}x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}$. ⭐ ⭐ ⭐

  其中积分域为 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 围成的区域.

  更一般的, 考虑 $x_1^{n_1-1}\cdot\dots\cdot x_m^{n_m-1}$ 在 $x_i=0$, $\sum x_i=1$ 的积分.
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^\alpha x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$. (由贝塔函数直接得)

n 维球

- 体积

$$V_n=\int_0^R r^{n-1}\,\mathrm{d}r\prod_{i=1}^{n-1}\int_0^\pi\sin^{n-1-i}\varphi_i\,\mathrm{d}\varphi_i=\frac{(\sqrt{\pi}R)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

- 表面积

$$S_n=\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}R}=\frac{n\pi^{\frac{n}{2}}R^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

积分技巧

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin 2x)\,\mathrm{d}x$.
  - $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.
  - $\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2\pi}$.
- 交换积分次序.
  - $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. (转为先对 a 积分后对 x 积分, 再改变次序.)
- 分部积分.
  - $\displaystyle\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. (两次分部积分)
- 费曼积分法.
- 利用相似的函数.
  - $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2}$. 利用 $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2}$.

例题

1. $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin x^4\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
2. 设 $f(t)$ 在 $t>0$ 上连续, 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $\lambda=a$ 和 $\lambda=b$ 时都收敛, 则 $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. ⭐
3. 设 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则 $f(x)$ 的 **Laplace 变换** $F(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=1$.

15.2 的 9 - 15 道习题. ⭐ ⭐ ⭐

第 16 章 Fourier 级数

定理

函数的 Fourier 级数展开

Euler-Fourier 公式 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$.

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$
$$b_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Fourier 级数, **Fourier 系数**.

正弦级数 (奇延拓, 奇函数), **余弦级数** (偶延拓, 偶函数).

任意周期的函数的 Fourier 展开 对于周期为 $2T$ 的函数 $f(x)$, 作变换 $x=\dfrac{T}{\pi}t$, 则有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)$$
$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x$$
$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x$$

Fourier 级数的收敛判别法

Dirichlet 积分 Fourier 级数的部分和为

$$
\begin{aligned}
S_m(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

记 $\varphi_\sigma(u,x)=f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)$, 则

$$
S_m(x)-\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_\sigma(u,x)\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,\mathrm{d}u
$$

左式收敛于 0 等价于右式收敛于 0.

定理 16.2.1 (Riemann 引理) ⭐ 设函数 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积或绝对可积, 则成立

$$
\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.
$$

- 回顾反常积分的 Cauchy 收敛原理.

推论 16.2.1 (局部性原理) 可积或绝对可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 点是否收敛只与 $f(x)$ 在 $(x-\delta,x+\delta)$ 的性质有关, 其中 δ 是任意小的正常数.

推论 16.2.2 ⭐ 设函数 $\psi(u)$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积, 则成立

$$
\lim_{m\to\infty}\int_0^\delta \psi(u)\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\,\mathrm{d}u=\lim_{m\to\infty}\int_0^\delta \psi(u)\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}u}{u}\,\mathrm{d}u.
$$

Dini 条件 $\exists\delta>0$, 使得 $\dfrac{\varphi_\sigma(u,x)}{u}=\dfrac{f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)}{u}$ 关于 u 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积.

- 必要条件为 $\sigma(x)=\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

定理 16.2.2 ⭐ 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积, 且满足下列两个条件之一, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在点 x 处收敛于 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

1. (**Dirichlet - Jordan 判别法**) $f(x)$ 在点 x 的某个邻域 $O(x,\delta)$ 上是分段单调有界函数.
2. (**Dini - Lipschitz 判别法**) $f(x)$ 在点 x 处满足指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 **Holder 条件**.

- 这两个条件互不包含, 即并不必要.

定义 16.2.2 (Holder 条件) 设点 x 是函数 $f(x)$ 的连续点或第一类不连续点, 若对于充分小的正数 δ, 存在常数 $L>0$ 和 $\alpha\in(0,1]$, 使得

$$
|f(x\pm u)-f(x\pm)|<Lu^\alpha\quad(0<u<\delta),
$$

则称 $f(x)$ 在点 x 处满足指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 **Holeder 条件** (当 $\alpha=1$ 时也称为 **Lipschitz 条件**).

定理 16.2.3 (Dirichlet 引理) ⭐ 设函数 $\psi(u)$ 在 $[0,\delta]$ 上单调, 则成立

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^\delta \frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u=0.$$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^\delta \psi(u)\frac{\sin pu}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\psi(0+).$$

- 第二个等价的式子是由 Dirichlet 积分得来的.

推论 16.2.3 ⭐ 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积, 在点 x 处两个单侧导数 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$ 都存在, 或更进一步, 只要两个 **拟单侧导数**

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x\pm h)-f(x\pm)}{h}$$

存在, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 点处收敛于 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

- 由可导条件强于 Lipschitz 条件即得.

Fourier 级数的分析性质

假定 $f(x)$ 的周期为 2π.

定理 16.3.1 ⭐ 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积, 则对于 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n 和 b_n, 有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0.$$

- 由 Riemann 引理即得.

定理 16.3.2 (Fourier 级数的逐项积分定理) ⭐ 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积, 则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数可以逐项积分, 即对于任意的 $c,x,\in[-\pi,\pi]$,

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_c^x\frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t.$$

- 可以有无穷个第一类间断点.
- 即使 $f(x)$ 的 Fourier 级数不表示 $f(x)$, 甚至不收敛, 也可以使用这个定理. 🌙

推论 ⭐ $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是某个在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 是点点收敛的, 但是 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, 故它不可能是某个可积或绝对可积函数的 Fourier 级数. 🌙

定理 16.3.3 (Fourier 级数的逐项微分定理) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$f(-\pi)=f(\pi)$, 且除了有限个点外 $f(x)$ 可导. 进一步假设 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积 (可以在有限个点无定义). 则

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n n \sin nx + b_n n \cos nx).$$

Fourier 级数的逼近性质

定义 16.3.1 设 S 是一个定义了内积运算 $(\cdot,\cdot)$ 的线性空间, 取 S 中的范数为

$$\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)},$$

T 是 S 的一个 n 维子空间, 记 T 的一组正交基为 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 即

$$T = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\},$$

若对于 $x \in S$, 有 $x_T = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n \in T$, 使得

$$\|x - x_T\| = \min_{y \in T} \|x - y\|.$$

则称 x_T 是 x 在 T 中的 **最佳平方逼近元**.

引理 16.3.1 ⭐ 在上述假定下

1. $\forall x \in S$, x 在 T 中的最佳平方逼近元素 x_T 存在且唯一.
2. $x_T \in T$ 是 x 在 T 中的最佳平方逼近元素的充要条件是 $(x - x_T) \perp T$, 即 $(x - x_T, \varphi_k) = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$, 或者等价地, x_T 的组合系数为
$$c_k = \frac{(x, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$
3. 最佳平方逼近的余项满足估计式
$$\|x - x_T\|^2 = \|x\|^2 - \|x_T\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2.$$

取 S 为 $[-\pi, \pi]$ 上可积或平方可积的函数全体, 定义

$$(f, g) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

记 T 为 **n 阶三角多项式** $\dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ 的全体, 则

$$T = \operatorname{span}\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx\}.$$

于是有

$$\|1\|^2 = 2, \quad \|\cos kx\| = \|\sin kx\| = 1.$$
$$(f, \cos kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = a_k,$$
$$(f, \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = b_k.$$

定理 16.3.4 (Fourier 级数的平方逼近性质) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 在 T 中的最佳平方逼近元素恰为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和函数

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

逼近的余项为

$$\|f-S_n\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

- 在余项中令 $n\to\infty$, 即得到

推论 16.3.2 (Bessel 不等式) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 16.3.5 (Parseval 等式) ⭐ 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则成立等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

定义 16.3.2 若函数序列 $\{\psi_n(x)\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-\psi_n(x)\|^2=0,$$

这里 $f(x)$ 是某一个固定函数, 则称 $\{\psi_n(x)\}$ 按范数 $\|\cdot\|$ **平方收敛于** $f(x)$.

推论 16.3.3 (Fourier 级数的平方收敛性质) ⭐ 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和函数序列平方收敛于 $f(x)$.

定理 16.3.6 (Weierstrass 第二逼近定理) ⭐ 对周期为 2π 的任意一个连续函数 $f(x)$, 都存在三角多项式序列

$$\left\{\psi_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)\right\},$$

使得 $\{\psi_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

等周问题

定理 16.3.7 平面上具有定长的所有简单闭曲线中, 圆周所围的面积最大,. 换言之, 若 L 是平面上简单闭曲线 C 的长度, A 是曲线 C 的面积, 则

$$A\le\frac{L^2}{4\pi},$$

且当且仅当 C 为圆周时取等.

引理 16.3.2 (Wirtinger) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, $f(-\pi)=f(\pi)$, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, 且除了有限个点外 $f(x)$ 可导, 但在不可导点的单侧导数存在.进一步假设 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或平方可积, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x\le\int_{-\pi}^{\pi}f'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=a\cos x+b\sin x$.

Fourier 变换和 Fourier 积分

$$
\begin{aligned}
f_T(x) &\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x)\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x}+\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n x}\right)\\
c_n &= a_n-\mathrm{i}b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\,\mathrm{d}t\\
c_{-n} &= a_n+\mathrm{i}b_n=\overline{c}_n\\
f_T(x) &\sim \frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x}+c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n x})\\
&\sim \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x}\quad(\textbf{Fourier}\text{ 级数的复数形式})\\
&\sim \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n x}\\
\Delta\omega &:= \omega_n-\omega_{n-1}=\frac{\pi}{T}\\
\varphi_T &:= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{2\pi}\int_{-T}^{T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\\
f(x) &= \lim_{T\to+\infty}f_T(x)\sim\lim_{\Delta\omega\to0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_T(\omega_n)\Delta\omega\\
&\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega\\
&\sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\,\mathrm{d}t\quad(f\text{ 的 }\textbf{Fourier}\text{ 积分})\\
F[f](\omega) := \hat{f}(\omega) &:= \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\quad(f\text{ 的 }\textbf{Fourier}\text{ 变换 (或像函数)})\\
F^{-1}[\hat{f}](x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega\quad(\hat{f}\text{ 的 }\textbf{Fourier}\text{ 逆变换 (或像原函数)})
\end{aligned}
$$

定理 16.4.1 ⭐ 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 且在 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何闭区间上分段可导, 则 f 的 Fourier 积分满足: 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\,\mathrm{d}t=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Fourier 积分的三角形式 (实形式)

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\,\mathrm{d}t\quad(\text{注意积分限})$$

偶函数可以看成 **Fourier 余弦变换** 及其逆变换复合而成

$$
\begin{aligned}
F_c[f]&=\hat{f}_c(\omega)=\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x\\
F_c^{-1}[\hat{f}_c]&=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

Fourier 余弦变换为什么没有系数 2, 而是移至其逆变换? 😕

奇函数可以看成 **Fourier 正弦变换** 及其逆变换复合而成

$$F_s[f]=\hat{f}_s(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x$$
$$F_s^{-1}[\hat{f}_s]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}_s(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega$$

Fourier 变换的性质

1. **线性性质**

   若 f, g 的 Fourier 变换及其逆变换存在, 则

$$F[c_1 f+c_2 g]=c_1F[f]+c_2F[g]$$
$$F^{-1}[c_1\hat{f}+c_2\hat{g}]=c_1F^{-1}[\hat{f}]+c_2F^{-1}[\hat{g}]$$

2. **位移性质**

   若 f 的 Fourier 变换及其逆变换存在, 则

$$F[f(x\pm x_0)](\omega)=F[f](\omega)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega x_0}$$
$$F^{-1}[\hat{f}(\omega\pm\omega_0)](x)=F^{-1}[\hat{f}](x)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega x}$$

$$F[f(x\pm x_0)]=F[f]\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega x_0}$$
$$F^{-1}[\hat{f}(\omega\pm\omega_0)]=F^{-1}[\hat{f}]\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega x}$$

3. **时间尺度性** $F[f(ax)]=\dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.
4. **频率尺度性** $F\left[\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x}{a}\right)\right]=\hat{f}(a\omega)\ (a>0)$.
5. **微分性质**
   1. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数, 且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, 则由分部积分得

$$F[f']=\mathrm{i}\omega\cdot F[f].$$

   2. 若 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 则

$$F[-\mathrm{i}x\cdot f]=(F[f])'.$$

6. **积分性质**

   若 $f(x)$ 和 $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 则由微分性质得

$$F\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{F[f]}{\mathrm{i}\omega}.$$

卷积

定义 16.4.2 设函数 f 和 g 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 且积分

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

存在, 则称函数 $f*g$ 为 f 和 g 的卷积.

- 卷积具有对称性, 即 $f*g=g*f$.

定理 16.4.2 (卷积的 Fourier 变换) ⭐ 设函数 f 和 g 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 则有

$$F[f*g]=F[f]\cdot F[g].$$
$$F^{-1}[F[f]\cdot F[g]]=f*g.$$

定理 16.4.3 (Parseval 等式) ⭐ 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ 收敛. 记 f 的 Fourier 变换为 $\hat{f}$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega.$$

Fourier 变换的解释

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin x\omega x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega x}$$

Fourier 级数说明 $f(x)$ 可以通过频率为 ω (**基频**) 的正弦波 $\sin\omega x$ 和 $\cos\omega x$ (基波) 及其 n 次**谐波** $\sin n\omega x$, $\cos x\omega x$ 叠加而得. **谐频** 为 $n\omega$ 的谐波的振幅为

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|c_n|=\frac{1}{T}\left|\int_{-T}^{T}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega x}\,\mathrm{d}x\right|$$

离散 Fourier 变换

⭐

$$\begin{aligned}
X(j)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\\
\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\frac{nj}{N}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{nk}{N}}&=\delta_{j,k}=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k.\end{cases}\\
x(k)&=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{jk}{N}}
\end{aligned}$$

解释

1. 变换后的每个 $X(j)$ 都包含了原序列中所有信号的信息, 因此即使丢失了部分 $X(j)$, 仍可能从其它数据大致还原初始数据.
2. 可以剔除模较小的数据, 从而使需传输的序列大为缩短. 即易于作高校的压缩处理.

快速 Fourier 变换 (FFT)

单位根

1. 消去引理: $\omega_{dn}^{dk}=\omega_n^k$.
2. 折半引理: $(\omega_n^{k+\frac{n}{2}})^2=\omega_{\frac{n}{2}}^k$.
3. 求和引理: $\sum_{i=0}^{n-1}(\omega_n^k)^i=0$.

多项式

- 次数界: 即任何一个大于多项式次数的整数.
- 系数表示 $\boldsymbol{a}=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$.
  - 加法 $O(n)$: $c_i=a_i+b_i$.
  - 乘法 $O(n^2)$: $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$.
  - 求值 $O(n)$: 霍纳法则 (秦九韶算法)

$$A(x) = (\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots a_1)x + a_0.$$

- 点值表示 $\{(x_0, A(x_0)), (x_1, A(x_1)), \cdots, (x_n, A(x_n))\}$.
  - 加法 $O(n)$: $C(x_i) = A(x_i) + B(x_i)$.
  - 乘法 $O(n)$: $C(x_i) = A(x_i)B(x_i)$.
  - 插值 $O(n^2)$: $A(x) = \sum_{i=0}^{n} A(x_i) \dfrac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}$.

离散傅里叶变换 (DFT, Discret Fourier Transform)

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$y_i = A(\omega_n^i) = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{ij} a_j$$

$$\boldsymbol{y} = \mathrm{DFT}_n(\boldsymbol{a}) = \mathcal{F}\boldsymbol{a} \quad (O(n^2))$$

快速傅里叶变换 (FFT, Fast Fourier Transform)

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \\ A^{[0]}(x^2) &= a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} \\ A^{[1]}(x^2) &= a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \cdots + a_{n-1}x^{n-2} \\ A(x) &= A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A(\omega_n^k) = A^{[0]}(\omega_{\frac{n}{2}}^k) + \omega_n^k A^{[1]}(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \\ A(\omega_n^{k+\frac{n}{2}}) = A^{[0]}(\omega_{\frac{n}{2}}^k) - \omega_n^k A^{[1]}(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \end{cases}$$

$$\mathrm{DFT}_n(\boldsymbol{a}) \to \begin{cases} \mathrm{DFT}_{\frac{n}{2}}(\boldsymbol{a}^{[0]}) \\ \mathrm{DFT}_{\frac{n}{2}}(\boldsymbol{a}^{[1]}) \end{cases} \to \cdots$$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = O(n \log n) < O(n^2)$$

递归时下标的规律

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 000 & 100 & 010 & 110 & 001 & 101 & 011 & 111 \end{matrix}$$

1. 位逆序置换.
2. 偶数位的首位为 0, 奇数位的首位为 1.
3. 每两个数除首位外均相同.
4. 每两个数除首位外是上一级子问题的解.
5. 前一半数除末位外是上一级子问题的解.

快速傅里叶逆变换 (IFFT, Inverse Fast Fourier Transform)

离散傅里叶变换 $y_i = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{ij} a_j$ 的系数矩阵为范德蒙德矩阵 $(\boldsymbol{V}_n)_{ij} = \omega_n^{ij}$, 逆矩阵为 $(\boldsymbol{V}_n)_{ij} = \dfrac{\omega_n^{-ij}}{n}$, 故

$$a_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{-ij} y_j$$

FFT 求卷积 $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$

1. 求傅里叶变换 (将系数表示转化为点值表示) $O(n \log n)$.

   即求出 $\mathrm{DFT}_{2n}(\boldsymbol{a})$, $\mathrm{DFT}_{2n}(\boldsymbol{b})$.

2. 计算普通乘法 $O(n)$.

   $\mathrm{DFT}_{2n}(\boldsymbol{a}) \circ \mathrm{DFT}_{2n}(\boldsymbol{b})$.

3. 求逆傅里叶变换 (将点值表示转化为系数表示) $O(n \log n)$.

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = \mathrm{IDFT}_{2n}\left(\mathrm{DFT}_{2n}(\boldsymbol{a}) \circ \mathrm{DFT}_{2n}(\boldsymbol{b})\right).$$

- 长度应扩大的 2 的幂次, 且输入的长度应扩大 1 倍.

递归的方式

```
// 基本思路，仅作演示，具体可见下一部分
void FFT(Complex *a, int lim) {
    if (lim == 1) return;
    Complex a0[lim >> 1], a1[lim >> 1];
    for (int i = 0; i < lim; i += 2)
        a0[i >> 1] = a[i], a1[i >> 2] = a[i + 1];
    FFT(a0, lim >> 1);
    FFT(a1, lim >> 1);
    Complex wn = Complex(cos(2.0 * PI / lim), sin(2.0 * PI / lim));
    Complex w = Complex(1, 0);
    for (int k = 0; k < (lim >> 1); ++k) {
        a[k] = a0[k] + w * a1[k];
        a[k + (lim >> 1)] = a0[k] - w * a1[k];
        w = w * wn;
    } // 合并
} // 递归的方式
```

迭代的方式

```
#include <bits/stdc++.h>            // "万能" 头文件
using namespace std;

int maxn = 2000010;                 // 能够处理的向量的最大长度
const double PI = acos(-1);
int rev[maxn], len = 0, lim = 1;    // rev 为 BitReverse 的次序 (通用)
                                    // lim 为傅里叶变换的向量长度 (2 的幂次)
                                    // len 为长度的维数

// 定义复数及其运算, 也可以使用 class
typedef struct Complex {
    double r, i;
    Complex { r = 0, i = 0; }
    Complex(double real, double imag): r(real), i(imag) {}
}Complex;
Complex operator + (Complex a, Complex b) {
    return Complex(a.r + b.r, a.i + b.i);
}
Complex operator - (Complex a, Complex b) {
    return Complex(a.r - b.r, a.i - b.i);
}
Complex operator * (Complex a, Complex b) {
    return Complex(a.r * b.r - a.i * b.i, a.r * b.i + a.i * b.r);
}

// 快速傅里叶变换 FFT 及其逆变换 IFFT
// opt 为 1 则进行傅里叶变换, 为 -1 则进行逆变换
```

```cpp
void FFT(Complex *a, int opt) {
    for (int i = 0; i < lim; ++i)
        if (i < rev[i]) swap(a[i], a[rev[i]]);  // 按 rev 数组排序 (BitReverse), 判断大小是为了只交换一次
    int maxDep = log2(lim);     // 也就是 len, 这一步可以修改为不需要全局变量 lim, 直接传入参数 int len = 0
    for (int dep = 1; dep <= maxDep; ++dep) {
        int m = 1 << dep;
        Complex wn = Complex(cos(2.0 * PI / m), opt * sin(2.0 * PI / m));   // m 次单位根
        for (int k = 0; k < lim; k += m) {
            Complex w = Complex(1, 0);      // 旋转因子, 初始为 1
            for (int j = 0; j < m / 2; ++j) {
                Complex t = w * a[k + j + m / 2];   // 蝴蝶操作, 简化运算
                Complex u = a[k + j];
                a[k + j] = u + t;           // FFT 的具体算法
                a[k + j + m / 2] = u - t;
                w = w * wn;     // 更新旋转因子
            }
        }
    }
    if (opt == -1)      // 即离散傅里叶逆变换
        for (int i = 0; i < lim; ++i)
            a[i].r /= lim;      // 逆变换由系数 n, 即 lim. 虚部为零, 故只需对实部操作, 且结果应为整数
} // FFT(Complex *a, int opt)

// 求卷积的实例, 对多项式系数向量 F 和 G 求卷积并保存至 F (算完之后 G 也进行了傅里叶变换)
int main() {
    int n, m; scanf("%d %d", &n, &m);   // 待求卷积的多项式次数
    Complex F[nmax], G[nmax];   // 待求卷积的两向量 (多项式)
    for (int i = 0; i <= n; ++i) scanf("%d", &F[i].r);
    for (int i = 0; i <= m; ++i) scanf("%d", &G[i].r);
    while (lim <= n+m) lim <<= 1, ++len;    // 长度扩大到 2 的幂次
    for (int i = 0; i < lim; ++i) rev[i] = rev[i >> 1] | ((i & 1) << (len - 1));
// 重新排列 BitReverse
    FFT(F, 1); FFT(G, 1);   // 对两向量进行离散傅里叶变换
    for (int i = 0; i <= m; ++i) F[i] *= G[i];  // 向量点乘后存储至 F 数组
    FFT(F, -1);     // 对上式结果进行离散傅里叶逆变换
    for (int i = 0; i <= n + m; ++i)
        printf("%d", (int)(F[i].r + 0.5));  // 离散傅里叶变换处理的对象时整数, 这里是消除误差后输出
    return 0;
}
```

注意

- 快速傅里叶变换的部分参考了鹤翔万里的视频. 源代码网页现已打不开, 不过从视频中看, len 未赋初值, 现已加上.
- 在离散傅里叶变换的公式中, 有些资料中自然对数的指数是正的, 有些却是负的, 实际上我的笔记中两种兼有. 两种写法都是对的, 只要与逆变换中的相反就星, 原因在于虚数单位的定义: $\mathrm{i}^2 = -1$, 或者形式上的 $\mathrm{i} = \pm\sqrt{-1}$. 符号是正是负, 只不过影响了虚轴的朝向, 算法的正确性由范德蒙德矩阵求逆所保证.

笔记

Fourier 展开

方波

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi). \end{cases} \\
&\sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

锯齿波

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

三角波

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \quad (-\pi < x \le \pi) \\
&= 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots + (-1))^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

半波整流

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{A}{2}(\sin t + |\sin t|) \\
&= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin x - \frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.
\end{aligned}
$$

全波整流

$$
\begin{aligned}
f(t) &= A\,|\sin t| \\
&= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.
\end{aligned}
$$

三角函数求和公式

推了无数遍, 却总也记不住 (下次一定).

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(ak+b) &= \frac{\sin\left(an + \frac{a}{2} + b\right) - \sin\left(\frac{a}{2} + b\right)}{2\sin\frac{a}{2}} \\
\sum_{k=1}^{n}\sin(ak+b) &= \frac{\cos\left(an + \frac{a}{2} + b\right) - \cos\left(\frac{a}{2} + b\right)}{2\sin\frac{a}{2}}
\end{aligned}
$$

- $\cos x$ 全部零点的倒数平方和恰为 1.

求解微分方程

利用 $F[u''] = \mathrm{i}\omega F[u'] = -\omega^2 F[u]$,

对于 $u''(x) - a^2u(x) + 2af(x) = 0 \quad (a > 0)$,

两边作 Fourier 变换, 得 $F[u] = \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}F[f]$,

而 $F\left[\mathrm{e}^{-a|x|}\right]=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}\ (a>0)$, 故

$$u(x)=F^{-1}\left[\frac{2a}{a^2+\omega^2}\cdot F[f]\right]=f*\mathrm{e}^{-a|x|}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-a|x-t|}\,\mathrm{d}t.$$